2017年成人高等学校招生全国统一考试专升本
高等数学(二)

题　号	一	二	三	总　分	统分人签字
得　分					

第Ⅰ卷 （选择题，共40分）

得　分	评卷人

一、选择题：1～10小题，每小题4分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 当 $x\to 0$ 时，下列各无穷小量中与 x^2 等价的是（　　）

A. $x\sin^2 x$　　B. $x\cos^2 x$　　C. $x\sin x$　　D. $x\cos x$

2. 下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是（　　）

A. $y=\sqrt[3]{x^5}$　　B. $y=\sqrt[5]{x^3}$　　C. $y=\sin x$　　D. $y=x^2$

3. 函数 $f(x)=\ln(x^2+2x+2)$ 的单调递减区间是（　　）

A. $(-\infty,-1)$　　B. $(-1,0)$　　C. $(0,1)$　　D. $(1,+\infty)$

4. 曲线 $y=x^3-3x^2-1$ 的凸区间是（　　）

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,2)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

5. 曲线 $y=e^{2x}-4x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程是（　　）

A. $2x-y-1=0$　　B. $2x+y-1=0$

C. $2x-y+1=0$　　D. $2x+y+1=0$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx=$（　　）

A. $\frac{2}{\sqrt{x}}+C$　　B. $-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$

C. $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$　　D. $-\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$

7. $\int_0^1 2^x dx=$（　　）

A. $\ln 2$　　B. $2\ln 2$　　C. $\frac{1}{\ln 2}$　　D. $\frac{2}{\ln 2}$

8. 设二元函数 $z=e^{x^2+y}$，则下列各式中正确的是（　　）

A. $\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2}$　　B. $\frac{\partial z}{\partial y}=e^y$

C. $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x^2+y}$　　D. $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2+y}$

9. 二元函数 $z=x^2+y^2-3x-2y$ 的驻点坐标是（　　）

A. $(-\frac{3}{2},-1)$　　B. $(-\frac{3}{2},1)$

C. $(\frac{3}{2},-1)$　　D. $(\frac{3}{2},1)$

10. 甲、乙两人各自独立射击1次，甲射中目标的概率为0.8，乙射中目标的概率为0.9，则至少有一人射中目标的概率为（　　）

A. 0.98　　B. 0.9　　C. 0.8　　D. 0.72

第Ⅱ卷 （非选择题，共110分）

得　分	评卷人

二、填空题：11～20小题，每小题4分，共40分．把答案填在题中横线上．

11. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^4+x^2-2}{4x^2+5x-8}=$ ________.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(3x+1)}=$ ________.

13. 曲线 $y=\frac{x+1}{(x-1)^2}$ 的铅直渐近线方程是 = ________.

14. 设函数 $f(x)=\sin(1-x)$，则 $f''(1)=$ ________.

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x\mathrm{d}x=$ ________.

16. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=$ ________.

17. 若 $\tan x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

18. 由曲线 $y=x^3$，直线 $x=1$，x 轴围成的平面有界区域的面积为________.

19. 设二元函数 $z=x^4\sin y$，则 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,\frac{\pi}{4})}=$ ________.

20. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $e^y=x+y$ 所确定的隐函数，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ________.

得　分	评卷人

三、解答题:21 ～ 28 题,共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤.

21. (本题满分 8 分)

求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$.

22. (本题满分 8 分)

已知函数$f(x)=\cos(2x+1)$,求$f'''(0)$.

23.（本题满分 8 分）

计算$\int \frac{1}{3(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

24.（本题满分 8 分）

计算$\int_0^1 x\arctan x dx$.

25.(本题满分 8 分)

设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	0.3	0.4	0.3

求 X 的数学期望 $E(X)$ 及方差 $D(X)$.

26.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = x^4 - 4x + 1$

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;

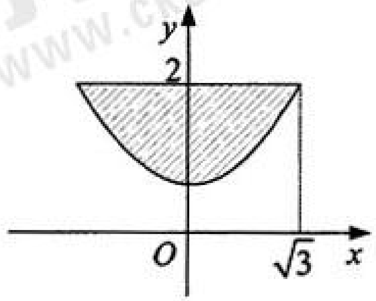
(2) 求曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间.

27.（本题满分 10 分）

记曲线 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ 与直线 $y = 2$ 所围成的平面图形为 D(如图中阴影部分所示).

(1) 求 D 的面积 S;

(2) 求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.



28.（本题满分 10 分）

设 $z = \frac{u}{v}$,其中 $u = x^2y, v = x + y^2$,求$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$及 dz.

2017年成人高等学校招生全国统一考试专升本
高等数学(二)

一、选择题

1. C 【解析】无穷小量等价,那么他们比值的极限为1.

因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$,所以$x\sin x$与$x^2$等价.

2. B 【解析】B选项,在$x=0$处$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^{\frac{3}{5}}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^{\frac{2}{5}}}=+\infty$,导数为无穷大,所以$y=\sqrt[5]{x^3}$在$x=0$不可导.

3. A 【解析】可导函数单调递减区间导数值小于0,$f(x)=\ln(x^2+2x+2)$,

$f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x+2}=\frac{2x+2}{(x+1)^2+1}<0$,解出$x<-1$,所以单调递减区间为$(-\infty,-1)$.

4. A 【解析】凸函数的二阶导数小于0,已知$y=x^3-3x^2-1$,$y'=3x^2-6x$,$y''=6x-6$,令$y''=6x-6<0$,解出$x<1$,所以函数凸区间为$(-\infty,1)$.

5. B 【解析】函数在某点的切线的斜率是该点的导数,

斜率$k=y'\Big|_{x=0}=(2e^{2x}-4)\Big|_{x=0}=-2$

所以切线方程为$y-1=-2x$,整理为$y+2x-1=0$.

6. B 【解析】$\int\frac{1}{\sqrt{x^3}}=\int x^{-\frac{3}{2}}dx=-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$.

7. C 【解析】$\int_0^1 2^x dx=\frac{1}{\ln2}2^x\Big|_0^1=\frac{1}{\ln2}$.

8. D 【解析】$z=e^{x^2+y}$,则$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2+y}$,$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2+y}$.

9. D 【解析】二元函数的驻点是一阶偏导数为0的点,即

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2x-3=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y-2=0\end{cases},\text{解出}\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\ y=1\end{cases},\text{所以驻点为}\left(\frac{3}{2},1\right).$$

10. A 【解析】设甲射中为事件A,乙射中为事件B

解法一 至少一人射中那么就表示甲射中乙不射中,乙射中甲不射中,甲乙都射中,即

$$\begin{aligned}P&=P(A\overline{B}+\overline{A}B+AB)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB)\\&=0.8\times(1-0.9)+(1-0.8)\times0.9+0.8\times0.9=0.98.\end{aligned}$$

解法二 至少一人射中的否定是甲、乙没有一个射中,即

$$P=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-(1-0.8)\times(1-0.9)=1-0.02=0.98.$$

二、填空题

11. 2　【解析】$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^4+x^2-2}{4x^2+5x-8}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3+1-2}{4+5-8}=2.$

12. $\dfrac{1}{3}$　【解析】当 $x\to0$,分子分母都为 0,可以使用洛必达法则

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(3x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\dfrac{3}{3x+1}}=\frac{1}{3}.$$

13. $x=1$　【解析】函数铅直渐进线可能出现在无穷处或者函数不连续处且极限值为 ∞,

当 $x\to\infty$ 时,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{(x-1)^2}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2(x-1)}=\dfrac{1}{2}\neq\infty$(排除).

当 $x\to1$ 时,$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{(x-1)^2}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{2(x-1)}=\infty.$

14. 0　【解析】$f'(x)=\cos(1-x)(1-x)'=-\cos(1-x)$

$f''(x)=\sin(1-x)(1-x)'=-\sin(1-x)$,则 $f''(1)=0.$

15. $-\dfrac{1}{3}$　【解析】$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos3x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos3x\mathrm{d}(3x)=\dfrac{1}{3}\sin3x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\dfrac{1}{3}.$

16. 1　【解析】$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}-x^{-1}\Big|_1^b=\lim\limits_{b\to+\infty}-(\dfrac{1}{b}-1)=1.$

17. $\tan x+C$　【解析】若 $\tan x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则 $\int f(x)\mathrm{d}x=\tan x+C.$

18. $\dfrac{1}{4}$　【解析】所围成区域 x 取值范围是 $(0,1)$,$S=\int_0^1x^3\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}.$

19. $2\sqrt{2}\mathrm{d}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}y$　【解析】　$\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3\sin y;\frac{\partial z}{\partial y}=x^4\cos y,\mathrm{d}z\Big|_{(1,\frac{\pi}{4})}=2\sqrt{2}\mathrm{d}x+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}y.$$

20. $\dfrac{1}{e^y-1}$　【解析】方程 $e^y=x+y$ 两端同时对 x 求导 $e^y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

解出
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{e^y-1}.$$

三、解答题

21. **解法一**　当 $x\to0$ 时,分子分母都为零,可以使用洛必达法则

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x+\cos x-x\sin x}{\cos x}=2.$$

解法二　当 $x\to0$ 时,$\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2$,$\sin x=x$

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\dfrac{1}{2}x^2}=2.$$

22. $f(x)=\cos(2x+1), f'(x)=-2\sin(2x+1)$,

$f''(x)=-4\cos(2x+1), f'''(x)=8\sin(2x+1)$

$f'''(0)=8\sin 1$.

23. $$\int\frac{1}{3(1+\sqrt[3]{x})}dx \xlongequal{令\sqrt[3]{x}=t} \int\frac{1}{3(1+t)}3t^2dt=\int\frac{t^2}{1+t}dt$$

$$=\int\frac{t^2-1+1}{1+t}dt=\int(t-1)dt+\int\frac{1}{1+t}dt$$

$$=\frac{1}{2}t^2-t+\ln(1+t).$$

则 $$\int\frac{1}{3(1+\sqrt[3]{x})}dx=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+\ln(1+\sqrt[3]{x})+C.$$

24. 分部积分公式$\int udv=uv-\int vdu$

$$\int_0^1 x\arctan x dx=\int_0^1\arctan x d(\frac{x^2}{2})=\frac{x^2}{2}\arctan x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 d(\arctan x)$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1 dx-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

25. $E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=0\times0.3+1\times0.4+2\times0.3=1$.

$E(X^2)=0\times0.3+1\times0.4+2^2\times0.3=1.6$.

$dx=E(X^2)-E^2X=1.6-1=0.6$.

26. (1) 函数$f(x)=x^4-4x+1$,则$f'(x)=4x^3-4$,

令$f'(x)<0$,解出$x<1$,所以函数$f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,1)$,

令$f'(x)>0$,解出$x>1$,所以函数$f(x)$的单调递增区间为$(1,+\infty)$.

函数在$x=1$处取得极小值为$f(1)=1-4+1=-2$.

(2)$f''(x)=12x^2$,则$f''(x)\geqslant0$,所以函数在$\mathbf{R}$上为凹函数.

27. (1)$S=2\int_0^{\sqrt{3}}\left[2-(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2})\right]dx=2\int_0^{\sqrt{3}}(-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2})dx=2\sqrt{3}$.

(2)$V=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}f^2(y)dy=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2y-1)dy=\pi(y^2-y)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{9}{4}\pi$.

28. $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\frac{1}{x+y^2}\cdot2xy-\frac{x^2y}{(x+y^2)^2}=\frac{x^2y+2xy^3}{(x+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$