

2017 年成人高等学校招生全国统一考试专升本 高等数学(二)

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
得 分					

第 I 卷 (选择题, 共 40 分)

得 分	评卷人

一、选择题: 1 ~ 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的, 把所选项前的字母填在题后的括号内.

- 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列各无穷小量中与 x^2 等价的是 ().
 A. $x \sin^2 x$ B. $x \cos^2 x$ C. $x \sin x$ D. $x \cos x$
- 下列函数中, 在 $x = 0$ 处不可导的是 ().
 A. $y = \sqrt[3]{x^5}$ B. $y = \sqrt[5]{x^3}$ C. $y = \sin x$ D. $y = x^2$
- 函数 $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ 的单调递减区间是 ().
 A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, 0)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, +\infty)$
- 曲线 $y = x^3 - 3x^2 - 1$ 的凸区间是 ().
 A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$
- 曲线 $y = e^{2x} - 4x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程是 ().
 A. $2x - y - 1 = 0$ B. $2x + y - 1 = 0$
 C. $2x - y + 1 = 0$ D. $2x + y + 1 = 0$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = ()$.
 A. $\frac{2}{\sqrt{x}} + C$ B. $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C$
 C. $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$ D. $-\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$
- $\int_0^1 2^x dx = ()$.
 A. $\ln 2$ B. $2 \ln 2$ C. $\frac{1}{\ln 2}$ D. $\frac{2}{\ln 2}$
- 设二元函数 $z = e^{x^2+y}$, 则下列各式中正确的是 ().
 A. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2}$ B. $\frac{\partial z}{\partial y} = e^y$
 C. $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y}$ D. $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y}$

9. 二元函数 $z = x^2 + y^2 - 3x - 2y$ 的驻点坐标是 ().

- A. $(-\frac{3}{2}, -1)$ B. $(-\frac{3}{2}, 1)$
C. $(\frac{3}{2}, -1)$ D. $(\frac{3}{2}, 1)$

10. 甲、乙两人各自独立射击 1 次, 甲射中目标的概率为 0.8, 乙射中目标的概率为 0.9, 则至少有一人射中目标的概率为 ().

- A. 0.98 B. 0.9 C. 0.8 D. 0.72

第 II 卷 (非选择题, 共 110 分)

得 分	评卷人

二、填空题: 11 ~ 20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 把答案填在题中横线上.

11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 + x^2 - 2}{4x^2 + 5x - 8} = \underline{\hspace{2cm}}.$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(3x + 1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

13. 曲线 $y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$ 的铅直渐近线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

14. 设函数 $f(x) = \sin(1-x)$, 则 $f''(1) = \underline{\hspace{2cm}}.$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

16. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

17. 若 $\tan x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

18. 由曲线 $y = x^3$, 直线 $x = 1$, x 轴围成的平面有界区域的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

19. 设二元函数 $z = x^4 \sin y$, 则 $dz \Big|_{(1, \frac{\pi}{4})} = \underline{\hspace{2cm}}.$

20. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y = x + y$ 所确定的隐函数, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}.$

得 分	评卷人

三、解答题:21 ~ 28 题,共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤.

21. (本题满分 8 分)

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$.

22. (本题满分 8 分)

已知函数 $f(x) = \cos(2x + 1)$, 求 $f'''(0)$.

23. (本题满分 8 分)

计算 $\int \frac{1}{3(1 + \sqrt[3]{x})} dx$.

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int_0^1 x \arctan x dx$.

25. (本题满分 8 分)

设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	0.3	0.4	0.3

求 X 的数学期望 $E(X)$ 及方差 $D(X)$.

26. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = x^4 - 4x + 1$.

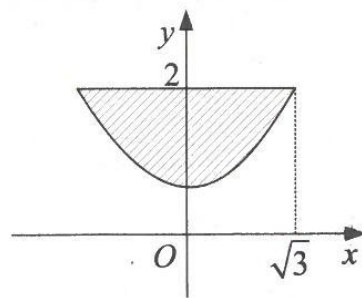
- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;
- (2) 求曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间.

27. (本题满分 10 分)

记曲线 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ 与直线 $y = 2$ 所围成的平面图形为 D (如图中阴影部分所示).

(1) 求 D 的面积 S ;

(2) 求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V .



28. (本题满分 10 分)

设 $z = \frac{u}{v}$, 其中 $u = x^2 y, v = x + y^2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 及 dz .

2017 年成人高等学校招生全国统一考试专升本 高等数学(二)

一、选择题

1. C 【解析】无穷小量等价,那么它们比值的极限为 1.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, 所以 $x \sin x$ 与 x^2 等价.

2. B 【解析】在 $x = 0$ 处, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{3}{5}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} = +\infty$, 导数为无穷大, 所以

$y = \sqrt[5]{x^3}$ 在 $x = 0$ 不可导.

3. A 【解析】可导函数单调递减区间导数值小于 0, $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$,

$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2} = \frac{2x+2}{(x+1)^2+1} < 0$, 解出 $x < -1$, 所以单调递减区间为 $(-\infty, -1)$.

4. A 【解析】凸函数的二阶导数小于 0, 已知 $y = x^3 - 3x^2 - 1$, $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$, 令 $y'' = 6x - 6 < 0$, 解出 $x < 1$, 所以函数凸区间为 $(-\infty, 1)$.

5. B 【解析】函数在某点的切线的斜率是该点的导数,

斜率 $k = y' \Big|_{x=0} = (2e^{2x} - 4) \Big|_{x=0} = -2$,

所以切线方程为 $y - 1 = -2x$, 整理为 $y + 2x - 1 = 0$.

6. B 【解析】 $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$.

7. C 【解析】 $\int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x \Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}$.

8. D 【解析】 $z = e^{x^2+y}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y}$.

9. D 【解析】二元函数的驻点是一阶偏导数为 0 的点, 即

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 2 = 0, \end{cases} \text{解出} \begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ y = 1, \end{cases} \text{所以驻点为} (\frac{3}{2}, 1).$$

10. A 【解析】设甲射中为事件 A , 乙射中为事件 B .

解法一 至少一人射中那么就表示甲射中乙不射中, 乙射中甲不射中, 甲乙都射中, 即

$$\begin{aligned} P &= P(\overline{A}B + A\overline{B} + AB) = P(\overline{A}B) + P(A\overline{B}) + P(AB) \\ &= 0.8 \times (1 - 0.9) + (1 - 0.8) \times 0.9 + 0.8 \times 0.9 = 0.98. \end{aligned}$$

解法二 至少一人射中的否定是甲、乙没有一个射中, 即

$$P = 1 - P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - (1 - 0.8) \times (1 - 0.9) = 1 - 0.02 = 0.98.$$

二、填空题

11. 2 【解析】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 + x^2 - 2}{4x^2 + 5x - 8} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 + 1 - 2}{4 + 5 - 8} = 2.$

12. $\frac{1}{3}$ 【解析】当 $x \rightarrow 0$, 分子分母都为 0, 可以使用洛必达法则.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(3x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{3}{3x + 1}} = \frac{1}{3}.$$

13. $x = 1$ 【解析】函数铅直渐近线可能出现在无穷处或者函数不连续处且极限值为 ∞ ,

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{(x - 1)^2} \xrightarrow[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2(x - 1)} = \frac{1}{2} \neq \infty$ (排除).

当 $x \rightarrow 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{(x - 1)^2} \xrightarrow[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2(x - 1)} = \infty.$

14. 0 【解析】 $f'(x) = \cos(1 - x)(1 - x)' = -\cos(1 - x),$

$f''(x) = \sin(1 - x)(1 - x)' = -\sin(1 - x),$ 则 $f''(1) = 0.$

15. $-\frac{1}{3}$ 【解析】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x d(3x) = \frac{1}{3} \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}.$

16. 1 【解析】 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} -x^{-1} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} -(\frac{1}{b} - 1) = 1.$

17. $\tan x + C$ 【解析】若 $\tan x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int f(x) dx = \tan x + C.$

18. $\frac{1}{4}$ 【解析】所围成区域 x 取值范围是 $(0, 1), S = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$

19. $2\sqrt{2}dx + \frac{\sqrt{2}}{2}dy$ 【解析】 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 \sin y; \frac{\partial z}{\partial y} = x^4 \cos y, dz \Big|_{(1, \frac{\pi}{4})} = 2\sqrt{2}dx + \frac{\sqrt{2}}{2}dy.$$

20. $\frac{1}{e^y - 1}$ 【解析】方程 $e^y = x + y$ 两端同时对 x 求导得, $e^y \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx},$

解出 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - 1}.$

三、解答题

21. 解法一 当 $x \rightarrow 0$ 时, 分子分母都为零, 可以使用洛必达法则.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \sin x}{\cos x} = 2.$$

解法二 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2$, $\sin x \sim x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2.$$

$$22. f(x) = \cos(2x + 1), f'(x) = -2\sin(2x + 1),$$

$$f''(x) = -4\cos(2x + 1), f'''(x) = 8\sin(2x + 1),$$

$$f'''(0) = 8\sin 1.$$

$$\begin{aligned} 23. \int \frac{1}{3(1 + \sqrt[3]{x})} dx & \stackrel{\text{令 } \sqrt[3]{x} = t}{=} \int \frac{1}{3(1 + t)} 3t^2 dt = \int \frac{t^2}{1 + t} dt \\ & = \int \frac{t^2 - 1 + 1}{1 + t} dt = \int (t - 1) dt + \int \frac{1}{1 + t} dt \\ & = \frac{1}{2}t^2 - t + \ln(1 + t). \end{aligned}$$

$$\text{则} \quad \int \frac{1}{3(1 + \sqrt[3]{x})} dx = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + \ln(1 + \sqrt[3]{x}) + C.$$

24. 分部积分公式 $\int u dv = uv - \int v du$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \arctan x dx &= \int_0^1 \arctan x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \arctan x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 d(\arctan x) \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$25. E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 = 1.$$

$$E(X^2) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.4 + 2^2 \times 0.3 = 1.6.$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2 X = 1.6 - 1 = 0.6.$$

$$26. (1) \text{ 函数 } f(x) = x^4 - 4x + 1, \text{ 则 } f'(x) = 4x^3 - 4,$$

令 $f'(x) < 0$, 解出 $x < 1$, 所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 1)$,

令 $f'(x) > 0$, 解出 $x > 1$, 所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1, +\infty)$.

函数在 $x = 1$ 处取得极小值为 $f(1) = 1 - 4 + 1 = -2$.

(2) $f''(x) = 12x^2$, 则 $f''(x) \geq 0$, 所以函数在 $\mathbf{R}$ 上为凹函数.

$$27. (1) S = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \left[2 - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right) \right] dx = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} \right) dx = 2\sqrt{3}.$$

$$(2) V = \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 f^2(y) dy = \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 (2y - 1) dy = \pi (y^2 - y) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{9}{4} \pi.$$

28.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{x + y^2} \cdot 2xy - \frac{x^2 y}{(x + y^2)^2} = \frac{x^2 y + 2xy^3}{(x + y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{x + y^2} \cdot x^2 - \frac{x^2 y}{(x + y^2)^2} \cdot 2y = \frac{x^3 - x^2 y^2}{(x + y^2)^2}.$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{x^2 y + 2xy^3}{(x + y^2)^2} dx + \frac{x^3 - x^2 y^2}{(x + y^2)^2} dy.$$