2020年成人高等学校招生全国统一考试专升本
高等数学(二)

题　号	一	二	三	总　分	统分人签字
得　分					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得　分	评卷人

一、选择题:1~10小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. $\lim\limits_{x \to 0}(1+2x)^{\frac{1}{3x}}=$ (　　).

A. $e^{\frac{3}{2}}$　　B. $e^{\frac{2}{3}}$　　C. $e^{\frac{1}{6}}$　　D. e^{6}

2. 设函数 $y=x+2\sin x$,则 $dy=$ (　　).

A. $(1-2\cos x)dx$　　B. $(1+2\cos x)dx$

C. $(1-\cos x)dx$　　D. $(1+\cos x)dx$

3. $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+2}=$ (　　).

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

4. 设函数 $f(x)=3+x^5$,则 $f'(x)=$ (　　).

A. x^4　　B. $1+x^4$　　C. $\dfrac{1}{5}x^4$　　D. $5x^4$

5. 设函数 $f(x)=2\ln x$,则 $f''(x)=$ (　　).

A. $\dfrac{2}{x^2}$　　B. $-\dfrac{2}{x^2}$　　C. $\dfrac{1}{x^2}$　　D. $-\dfrac{1}{x^2}$

6. $\int_{-2}^{2}(1+x)dx=$ (　　).

A. 4　　B. 0　　C. 2　　D. -4

7. $\int \dfrac{3}{x^5}dx=$ (　　).

A. $\dfrac{3}{4x^4}+C$　　B. $\dfrac{3}{5x^4}+C$　　C. $-\dfrac{3}{4x^4}+C$　　D. $-\dfrac{3}{5x^4}+C$

8. 把3本不同的语文书和2本不同的英语书排成一排,则2本英语书恰好相邻的概率为(　　).

A. $\dfrac{2}{5}$　　B. $\dfrac{4}{5}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

9. 设函数 $z = x^2 - 4y^2$，则 $dz = (\quad)$.

A. $x dx - 4y dy$

B. $x dx - y dy$

C. $2x dx - 4y dy$

D. $2x dx - 8y dy$

10. 设函数 $z = x^3 + xy^2 + 3$，则 $\frac{\partial z}{\partial y} = (\quad)$.

A. $3x^2 + 2xy$

B. $3x^2 + y^2$

C. $2xy$

D. $2y$

第 Ⅱ 卷（非选择题，共 110 分）

得　分	评卷人

二、填空题：11 ~ 20 小题，每小题 4 分，共 40 分. 把答案填在题中横线上.

11. 设函数 $y = e^{2x}$，则 $dy =$ ________.

12. 函数 $f(x) = x^3 - 6x$ 的单调递减区间为________.

13. 若函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, x \leq 0, \\ a + \sin x, x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续，则 $a =$ ________.

14. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} =$ ________.

15. $\int (3x + 2\sin x) dx =$ ________.

16. 曲线 $y = \arctan(3x + 1)$ 在点 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 处切线的斜率为________.

17. $\left(\int_0^{2x} \sin t^2 dt\right)' =$ ________.

18. $\int_{-\infty}^{1} e^x dx =$ ________.

19. 区域 $D = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x^2\}$ 的面积为________.

20. 方程 $y^3 + \ln y - x^2 = 0$ 在点 $(1,1)$ 的某邻域确定隐函数 $y = y(x)$，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} =$ ________.

得　分	评卷人

三、解答题：21 ~ 28 题，共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤.

21.（本题满分 8 分）

计算 $\int x \sin x dx$.

22.（本题满分 8 分）

计算$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x-x^2}{2\sin^2 x}$.

23.（本题满分 8 分）

已知函数$f(x)=e^x\cos x$,求$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

24.（本题满分 8 分）

计算$\int_0^1\sqrt[3]{1+x}\,dx$.

25.（本题满分 8 分）

设 D 为曲线 $y=\sqrt{x}$,直线 $x=4$,x 轴围成的有界区域,求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

26.（本题满分 10 分）

求函数 $z=x^2+2y^4+4xy^2-2x$ 的极值.

27.（本题满分 10 分）

求曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ 的凹凸区间与拐点.

28.（本题满分 10 分）

已知离散型随机变量 X 的概率分布为

X	-1	0	2
p	a	0.5	b

且 $E(X) = 0$.

(1) 求 a,b;

(2) 求 $E[X(X+1)]$.

参考答案及解析

2020 年成人高等学校招生全国统一考试专升本 高等数学(二)

一、选择题

1. B 【解析】$\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{3x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot\frac{2}{3}}=[\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}}$.

2. B 【解析】$dy=(x+2\sin x)'dx=(1+2\cos x)dx$.

3. A 【解析】当 $x\to1$ 时,分母不等于0,则可用直接代入法,得$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+2}=\dfrac{3}{2}$.

4. D 【解析】$f'(x)=(3+x^5)'=5x^4$.

5. B 【解析】$f'(x)=(2\ln x)'=\dfrac{2}{x}$, $f''(x)=\left(\dfrac{2}{x}\right)'=-\dfrac{2}{x^2}$.

6. A 【解析】$\int_{-2}^{2}(1+x)dx=\left(x+\dfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-2}^{2}=\left(2+\dfrac{1}{2}\times4\right)-\left(-2+\dfrac{1}{2}\times4\right)=4-0=4$.

7. C 【解析】$\int\dfrac{3}{x^5}dx=\int3x^{-5}dx=\int3x^{-4-1}dx=-\dfrac{3}{4}x^{-4}+C=-\dfrac{3}{4x^4}+C$.

8. A 【解析】2 本英语书恰好相邻的概率为$\dfrac{A_4^4A_2^2}{A_5^5}=\dfrac{2}{5}$.

9. D 【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-8y$,故 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=2xdx-8ydy$.

10. C 【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\cdot(y^2)'=2xy$.

二、填空题

11. $2e^{2x}dx$ 【解析】$y'=(e^{2x})'=2e^{2x}$,则 $dy=y'dx=2e^{2x}dx$.

12. $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 【解析】因为$f(x)=x^3-6x$,所以$f'(x)=3x^2-6$,令$f'(x)<0$,解得$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$,故函数$f(x)=x^3-6x$的单调递减区间为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

13. -2 【解析】已知$f(x)$在$x=0$处连续,则$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$,而$f(0)=-2$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x^2-2)=-2$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(a+\sin x)=a$,故 $a=-2$.

14. 1 【解析】$x\to0$ 时, $x^2\to0$,则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}=1$.

15. $\dfrac{3}{2}x^2-2\cos x+C$ 【解析】$\int(3x+2\sin x)dx=\dfrac{3}{2}x^2-2\cos x+C$.

16. $\dfrac{3}{2}$ 【解析】$y'=[\arctan(3x+1)]'=\dfrac{3}{1+(3x+1)^2}$,故曲线在点$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$处的切线斜率

为 $y'\Big|_{x=0}=\dfrac{3}{1+(3x+1)^2}\Big|_{x=0}=\dfrac{3}{2}$.

17. $2\sin(4x^2)$ 【解析】$\left(\int_0^{2x}\sin t^2\mathrm{d}t\right)'=\sin(2x)^2\cdot(2x)'=2\sin(4x^2)$.

18. e 【解析】$\int_{-\infty}^{1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\Big|_{-\infty}^{1}=\mathrm{e}-0=\mathrm{e}$.

19. $\dfrac{4}{3}$ 【解析】区域 D 的面积为$\int_1^2(x^2-1)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{1}{3}x^3-x\right)\Big|_1^2=\dfrac{4}{3}$.

20. $\dfrac{1}{2}$ 【解析】方程 $y^3+\ln y-x^2=0$ 两边对 x 求导,得 $3y^2\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2x=0$,

即$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2xy}{3y^3+1}$,故$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1}=\dfrac{2xy}{3y^3+1}\Big|_{x=1}=\dfrac{2\times1\times1}{3\times1^3+1}=\dfrac{1}{2}$.

三、解答题

21. $$\begin{aligned}\int x\sin x\mathrm{d}x&=-\int x\mathrm{d}(\cos x)\\&=-\left(x\cos x-\int\cos x\mathrm{d}x\right)\\&=-x\cos x+\int\cos x\mathrm{d}x\\&=-x\cos x+\sin x+C.\end{aligned}$$

22. $$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x-x^2}{2\sin^2x}&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2\sin^2x}-\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2\sin^2x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x^2}-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}\\&=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\\&=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

23. $$\begin{aligned}f'(x)&=(\mathrm{e}^x\cos x)'\\&=\mathrm{e}^x\cos x+\mathrm{e}^x(\cos x)'\\&=\mathrm{e}^x\cos x-\mathrm{e}^x\sin x\\&=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(x)&=[\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)]'\\&=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)+\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)'\\&=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)+\mathrm{e}^x(-\sin x-\cos x)\\&=-2\mathrm{e}^x\sin x,\end{aligned}$$

则$f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\sin\dfrac{\pi}{2}=-2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.

24. $\int_0^1\sqrt[3]{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1(1+x)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}(1+x)$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{3}}(1+x)^{1+\frac{1}{3}}\Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{4}(1+x)^{\frac{4}{3}}\Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{4}(2^{\frac{4}{3}}-1).$$

25. 区域 $D:0 \leqslant y \leqslant 2, y^2 \leqslant x \leqslant 4$,

故所得旋转体的体积 $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 - \int_0^2 \pi x^2 \mathrm{d}y$

$$= 32\pi - \int_0^2 \pi y^4 \mathrm{d}y$$

$$= 32\pi - \frac{\pi}{5}y^5 \Big|_0^2$$

$$= \frac{128}{5}\pi.$$

26. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y^2 - 2, \frac{\partial z}{\partial y} = 8y^3 + 8xy$,

令 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$,得驻点为 $(1,0),(-1,1),(-1,-1)$.

而 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24y^2 + 8x$,

在点 $(1,0)$ 处,$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(1,0)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{(1,0)} = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(1,0)} = 8$,

$B^2 - AC = -16 < 0$,且 $A > 0$,

故函数在点 $(1,0)$ 处有极小值,$z_{极小值} = -1$;

在点 $(-1,1)$ 处,$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(-1,1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{(-1,1)} = 8, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(-1,1)} = 16$,

$B^2 - AC = 32 > 0$,

故点 $(-1,1)$ 不是极值点;

在点 $(-1,-1)$ 处,$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(-1,-1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{(-1,-1)} = -8, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(-1,-1)} = 16$,

$B^2 - AC = 32 > 0$,

故点 $(-1,-1)$ 不是极值点.

因此,函数在点 $(1,0)$ 处有极小值,$z_{极小值} = -1$.

27. $y' = 3x^2 - 6x + 2, y'' = 6x - 6$.

令 $y'' = 6x - 6 = 0$,解得 $x = 1$.

当 $x < 1$ 时,$y'' < 0$,则 $(-\infty,1)$ 为曲线的凸区间;

当 $x > 1$ 时,$y'' > 0$,则 $(1,+\infty)$ 为曲线的凹区间.

当 $x = 1$ 时,$y = 1$,则曲线的拐点为 $(1,1)$.

28. (1) 由概率的性质可知 $a + 0.5 + b = 1$,

又 $E(X)=0$,则 $-1\times a+0\times 0.5+2\times b=0$,

解得 $a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{6}$.

(2) $E[X(X+1)]=E(X^2+X)=E(X^2)+E(X)$,

而 $E(X^2)=D(X)-[E(X)]^2$

$$=(-1-0)^2\times\frac{1}{3}+(0-0)^2\times 0.5+(2-0)^2\times\frac{1}{6}-0$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1.$$

因此,$E[X(X+1)]=1+0=1$.