

真题及参考答案

2021 年成人高等学校招生全国统一考试专升本试题

高等数学(二)

一、选择题(1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan mx}{x} = 2$, 则 $m =$ ()

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

2. 设 $y = e^x + \cos x$, 则 $y' =$ ()

A. $e^x + \cos x$

B. $e^x - \cos x$

C. $e^x - \sin x$

D. $e^x + \sin x$

3. 设 $y = x \tan x$, 则 $y' =$ ()

A. $\tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$

B. $\frac{x}{\cos^2 x}$

C. $\tan x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

D. $\tan x + \frac{x}{1+x^2}$

4. 设 $y = \frac{1}{1+x}$, 则 $y'' =$ ()

A. $-\frac{2}{(1+x)^3}$

B. $-\frac{1}{(1+x)^3}$

C. $\frac{1}{(1+x)^3}$

D. $\frac{2}{(1+x)^3}$

5. 曲线 $y = x^3 + 1$ 的拐点为 ()

A. (0,0)

B. (0,1)

C. (-1,0)

D. (1,1)

6. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\cos 2x$, 则 $f(x) =$ ()

A. $-\sin 2x$

B. $\sin 2x$

C. $-2\sin 2x$

D. $2\sin 2x$

7. 设 $\int_{-a}^a (x^2 + x^3) dx = \frac{2}{3}$, 则 $a =$ ()

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

8. 设 $z = \sin(x - 3y^2)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ ()

A. $-6y \cos(x - 3y^2)$ B. $-6y \sin(x - 3y^2)$ C. $6y \cos(x - 3y^2)$ D. $6y \sin(x - 3y^2)$

9. 设 $z = f(x^2 + y)$, 其中 f 具有二阶导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ ()

A. $xf''(x^2 + y)$ B. $2xf''(x^2 + y)$ C. $yf''(x^2 + y)$ D. $2xyf''(x^2 + y)$

10. 已知事件 A 与 B 互斥, 且 $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4$, 则 $P(A + B) =$ ()

A. 0.4

B. 0.5

C. 0.7

D. 0.9

二、填空题(11 ~ 20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} =$ _____.

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x + 2} =$ _____.

14. 设 $y = \cos\left(x + \frac{1}{x}\right)$, 则 $y'(1) =$ _____.

15. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x} + 1$, 则 $f'(x) =$ _____.

16. 曲线 $y = 2x^3 + x - 1$ 在点 $(0, -1)$ 处法线的斜率为 _____.

17. $\int \frac{1}{4+x^2} dx =$ _____.

18. $\int x(x^2 - 1) dx =$ _____.

19. $\int_0^1 (x + e^x) dx =$ _____.

20. 设函数 $f(x, y) = x + y$, 则 $f(x + y, x - y) =$ _____.



三、解答题(21 ~ 28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$.

22. (本题满分 8 分)

求函数 $f(x) = e^{-x^2}$ 的单调区间和极值.

23. (本题满分 8 分)

求 $\int (2\arcsin x + 1) dx$.

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$.

25. (本题满分 8 分)

设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	a	$3a$	$4a$	$2a$

其中 a 为常数.

(1) 求 a ;

(2) 求 $E(X)$.

26. (本题满分 10 分)

设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y = x^2 + y$ 所确定的隐函数,求 $\frac{dy}{dx}$.

27. (本题满分 10 分)

设 D 为由直线 $x + y - 4 = 0$ 与曲线 $y = \frac{3}{x}$ 所围成的闭区域.

(1) 求 D 的面积;

(2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

28. (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ 下的最大值和最小值.



参考答案

一、选择题(每小题 4 分,共 40 分)

1. D 2. C 3. A 4. D 5. B 6. C 7. C 8. A 9. B 10. D

二、填空题(每小题 4 分,共 40 分)

11. $\frac{3}{2}$

12. e

13. 2

14. 0

15. $-\frac{2}{x^3} + 1$

16. -1

17. $\frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$

18. $\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C$

19. $e - \frac{1}{2}$

20. $2x$

三、解答题(共 70 分)

$$\begin{aligned} 21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

22. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = -2xe^{-x^2}$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$,

当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递减区间为 $(0, +\infty)$,

$f(x)$ 的极大值为 $f(0) = 1$.

$$\begin{aligned} 23. \int (2\arcsin x + 1) dx &= 2x\arcsin x - 2 \int x d(\arcsin x) + x \\ &= 2x\arcsin x - \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx + x \\ &= 2x\arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} + x + C. \end{aligned}$$

24. 令 $t = \sqrt{x}$, 则 $x = t^2$, $dx = 2tdt$.

当 $x = 1$ 时, $t = 1$; 当 $x = 4$ 时, $t = 2$. 因此

$$\begin{aligned}
 \int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx &= \int_1^2 \frac{2t}{t^2+t} dt \\
 &= 2 \int_1^2 \frac{1}{t+1} dt \\
 &= 2 \ln(t+1) \Big|_1^2 \\
 &= 2 \ln \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

25. (1) 由概率分布的性质知

$$a + 3a + 4a + 2a = 1,$$

所以 $a = 0.1$.

$$\begin{aligned}
 (2) E(X) &= 0 \times 0.1 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.2 \\
 &= 1.7.
 \end{aligned}$$

26. 方程两边对 x 求导, 得 $e^y \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{dy}{dx}$,

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{e^y - 1}.$$

27. 由 $\begin{cases} x+y-4=0, \\ y=\frac{3}{x} \end{cases}$ 解得交点坐标为 $(1,3), (3,1)$.

$$\begin{aligned}
 (1) D \text{ 的面积 } S &= \int_1^3 \left(4 - x - \frac{3}{x} \right) dx \\
 &= \left(4x - \frac{x^2}{2} - 3 \ln x \right) \Big|_1^3 \\
 &= 4 - 3 \ln 3.
 \end{aligned}$$

(2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$\begin{aligned}
 V_x &= \pi \int_1^3 \left[(4-x)^2 - \left(\frac{3}{x} \right)^2 \right] dx \\
 &= \pi \left[-\frac{1}{3}(4-x)^3 + \frac{9}{x} \right] \Big|_1^3 \\
 &= \frac{8\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

28. 设 $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - xy - 1)$, 则

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda(2x - y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda(2y - x),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - xy - 1.$$

由 $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ 与 $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ 解得 $x = y$ 或 $x = -y$,

代入 $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ 得 $f(x, y)$ 在条件 $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ 下可能的极值点为

$$(1, 1), (-1, -1), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

因为由题设可知最大值和最小值一定存在, 所以最大值和最小值就在这些可能的极值点处取得.

$$\text{又 } f(1, 1) = f(-1, -1) = 2,$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3},$$

所以所求的最大值为 2, 最小值为 $\frac{2}{3}$.